振幅項がない擬相関関数によるカオスの半古典量子化

東京大学 総合文化研究科　堀田 浩司[1]，高塚 和夫[2]

1 序

半古典論は量子力学が誕生して以来、量子-古典対応を明らかにする理論として長年に渡って研究されている。半古典 Fynman Kernel を用いる研究においては、カオス領域で発散する振幅項を持つため、致命的な困難さを持つことがわかっている。この研究では、Takatsuka によって提案された turn-back orbits によって量子化を行い発散する振幅項を持たない半古典論　Amplitude-Free Quasi Correlation Function Type-I (AFC-I) に、軌道の寄与に弱い周期性を取り入れる改良を行い、その妥当性を数値計算で示した。

2 理論

Action-Decomposed Function (ADF) は Takatsuka と Inoue-Ushiyama によって、Bohum-Maslov 型波束 $\Psi(q,t) = F(q,t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{cl}\right]$ においてプランク定数の最低次近似より導き出された半古典論である [1]。この理論では作用項 S_{cl} を $S_{cl} = S_2(q, p_0, t)$ とする。このため関数 F の時間発展を p_0 の値で分割している作用面で考えていることになり、 Action Decomposed Function (ADF) と呼ばれる。

この ADF を用いた半古典波動関数を、相関関数 $C_{p_0}(-t,t) = \langle\Psi_{p_0}(-t)|\Psi_{p_0}(t)\rangle$ に適用した。この形の相関関数に最も効いて来る軌道は、$t = T$ を満たす周期軌道か、$p_0 = 0$ で $-t$ と t を走る二つの軌道の初期座標が一致している軌道 (turning-back orbit と呼ぶことにする) であることが停留位相近似より分かった。後者の turn-back orbit を適用した場合では、カオス領域で指数関数的に増大する振幅項を持たない擬相関関数が得られた (AFC-I) [2]。しかし、 AFC-I を 2 自由度系に適用した数値計算の結果では、スペクトルが高い精度で得られるものの、強カオス系においてはノイズが現れ、正しいスペクトルの同定が困難になることが分かった。

そこで、さらにこの相関関数に最も寄与する弱い周期軌道 (2t 後に相空間で非常に近い点を通る軌道) の情報を効率よく取り入れるように改良し、

$$\tilde{C}_0(0,t) = \int dq_0 \left\{F^*(q_t,0)F(q_0,0) + F(q_t,0)F^*(q_0,0)\right\}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_1(q_t,q_0,t) - \frac{i\pi}{2}M(q_0\to q_t)\right]$$

のように表した (AFC-II) [3]。

[1] E-mail: hotta@mns2.c.u-tokyo.ac.jp
[2] E-mail: kaztak@mns2.c.u-tokyo.ac.jp

3 数値計算結果

従来の方法では、相関関数が振幅項のため指数関数的に増大するなどしてエネルギースペクトルを求めることのできないケースとして、二自由度カオス系である修正 Hénon-Heiles ポテンシャルに AFC 適用した。Hamiltonian は

$$H = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y} + \frac{x^2+y^2}{2} + x^2(ay^2+y) + \frac{1}{3}y^3(by-y) + Ax \tag{1}$$

である。ここでは $m_x = 1.0087, m_y = 1.0, a = 0.6, b = 0.2$ である。A=0 の $E = 0.15$ 付近と $E = 0.25$ 付近、および $A = 0.1$ での $E = 0.15$ 付近のエネルギースペクトルについて調べ、量子波束から得られた結果とかなり一致していることを確かめた。図 1 に $A = 0.1$ $E = 0.15$ のときの (a) AFC のエネルギースペクトル、(b) 量子波束のエネルギースペクトル、(c) そのときのポアンアカレ面を示した。強カオス領域において AFC のスペクトルはブロードになっているが、そのピーク位置は量子波束のそれと一致している。この結果より、可積分系から非可積分系まで AFC はあらゆる系に対して半古典量子化の有効な手段となるといえる。

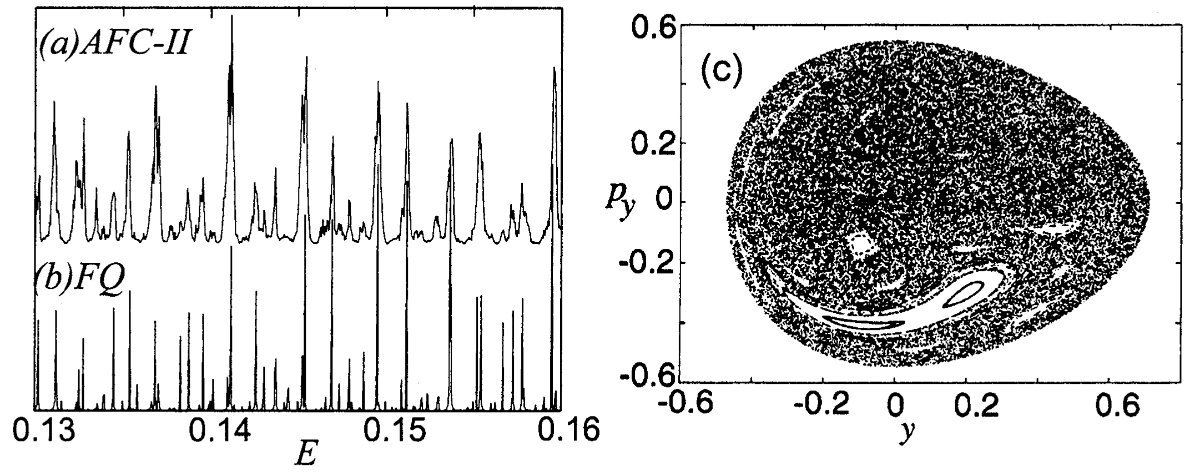

図 1: (a) AFC のエネルギースペクトル、(b) 量子波束のエネルギースペクトル、(c) 古典で対応するエネルギーのポアンカレ面

参考文献

[1] K. Takatsuka and A. Inoue, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), 1404; A. Inoue-Ushiyama and K. Takatsuka, Phys. Rev. A. **59** (1999), 3256 ; *ibid.* **60** (1999), 112.

[2] K. Takatsuka, Phys. Rev. E. **64** (2001), 016224.

[3] K. Hotta and K. Takatsuka, J. Phys. A; Math. Gen. **36** (2003), 4785.